

7. Übungsblatt: Kontextfreie Sprachen

Aufgabe 1. (H 3+4+2 Punkte)

Die Bewegung eines Tauchers werde beschrieben durch das Alphabet $\{n, s, w, e, o, u\}$, was besagt, dass er um jeweils einen Meter nach Norden, Süden, Westen, Osten, oben oder unten taucht. Zusätzlich gilt, dass ein Tauchgang am selben Punkt enden soll, an dem er begonnen hat. (Idealisierend sei angenommen, dass der Taucher punktförmig ist und keine Wasseroberfläche existiert.)

- a) Der Taucher bewege sich durch ein System enger, (d.h. < 1 Meter breiter), verzweigter Höhlen. Damit er wieder zurückfindet, hat er eine (unendlich lange) Leine, die er beliebig auf- und abwickeln kann; am Ende des Tauchgangs muss die Leine wieder aufgewickelt sein. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache der 'Höhlentauchgangswörter' an.
- b) Im offenen Meer benutzt der Taucher keine Leine und kann daher auch einen anderen Rückweg wählen. Geben Sie eine kontextsensitive Grammatik für die Sprache der 'Meerestauchgangswörter' an.
- c) Was ist in b) zu ändern, wenn eine Strömung den Taucher bei jedem Schritt zusätzlich zu seiner eigenen Bewegung um einen $\frac{3}{4}$ Meter nach Westen versetzt? (D.h. mit e kommt er nur $\frac{1}{4}$ Meter nach Osten voran, ein 'Strömungstauchgangswort' ist z.B. *eeneesee*.)

Aufgabe 2. (H 4+4 Punkte)

Zeigen Sie für **zwei** der folgenden Sprachen, dass sie nicht kontextfrei sind:

- $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 2\#_b(w) \text{ und } \#_a(w) - \#_b(w) \text{ ist Primzahl}\}$,
 $L_2 =$ die Sprache der 'Meerestauchgangswörter' aus 2b)
 $L_3 = \{a^i b^j \mid i^2 \geq j, \text{ für } i, j > 0\}$,
 $L_4 = \{b_n \& b_{n+1} \mid n \geq 1\}$ über $\{0, 1, \&\}$ (vergleiche Aufgabe 4 Blatt 5),
 $L_5 = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^+\}$,

Aufgabe 3. (H 1+4 Punkt)

- a) Nennen Sie ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass die kontextfreien Sprachen nicht unter Komplementbildung abgeschlossen sind.
- b) Sind die kontextfreien Sprachen unter dem Shuffle-Operator \sqcup abgeschlossen? Geben Sie die geeignet Sprache aus Aufgabe 2 als Shuffle von kontextfreien Sprachen an.

Aufgabe 4. (H 4+4 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow AA \mid c, A \rightarrow BB \mid a, B \rightarrow SS \mid b\}$ und das Wort $z = bcccaab$.

- a) Entscheiden Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob $z \in L(G)$.
- b) Geben Sie eine Zerlegung von z in $uvwxy$ entsprechend dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen an und erklären Sie warum $uv^iwx^iy \in L(G)$ für alle $i \geq 0$.

Aufgabe 5. (T)

Geben Sie zu der folgenden Grammatik eine äquivalente Grammatik in Greibach-Normalform an:

$G = (\{S, A\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow A0 \mid 0, A \rightarrow SS \mid 1\}$.

Aufgabe 6. (Zusatzaufgabe, falls Zeit übrig)

Zeigen Sie mittels $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \text{ oder } j = k = l, i, j, k, l \geq 0\}$, dass die Umkehrung des Pumping-Lemmas für reguläre und für kontextfreie Sprachen i.a. falsch ist. *Hinweis:* Der Durchschnitt einer kontextfreien mit einer regulären Sprache ist kontextfrei.