Übungen zur Vorlesung **WS 2001/2002**
Informatik III **Universität Tübingen**
Lange / Reinhardt **22.01.2002**

12. Übungsblatt: Rekursive Funktionen

Aufgabe 1. (**H** 4 + 5 Punkte)
Wir definieren die **beschränkt** μ-rekursiven Funktionen, indem wir anstelle des μ-Operators den beschränkten μ-Operator verwenden. Dieser macht aus einer Funktion f die Funktion

$$g(y, x_1, ...x_k) = \mu_{n \leq y}(f) = \min_y\{n \leq y \mid f(n, x_1, ...x_k) = 0\}$$

(Es sei $\min_y \emptyset = y + 1$.)

a) Stellen Sie $\lceil n^{\frac{3}{2}} \rceil$ (n hoch 3/2 aufgerundet) mit Hilfe des beschränkten μ-Operators dar.

b) Welcher der bisher bekannten Klassen entsprechen die **beschränkt** μ-rekursiven Funktionen? Begründung!

Aufgabe 2. (**H** 3 + 5 Punkte)
Ein Variante der Ackermannfunktion sei wie folgt definiert:

$A(0, y) = y + 1,$
$A(x, 0) = A(x - 1, 1) - 1$ für $x > 0$ und
$A(x, y) = A(x - 1, A(x, y - 1))$ für $x, y > 0$

a) Berechnen Sie $A(1, 1), A(1, 2)$ und $A(3, 2)$.
b) Geben Sie eine geschlossene (d.h. entrekursivierte) Formel für $A(1, y), A(2, y)$ und $A(3, y)$ an.

Aufgabe 3. (**H** 5 Punkte)
Sei $A = \{f(0), f(1), f(2), ...\}$, wobei $f : I\!N \longrightarrow \Sigma^*$ eine berechenbare, monoton wachsende Funktion ist. Zeigen Sie dass A entscheidbar ist. Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung A endlich und A nicht endlich.

Aufgabe 4. (**H** 3 Punkte)
Sei $f : I\!N \longrightarrow I\!N$ eine Funktion mit $2^{f(2^n)} > a(n, n)$ für alle $n > 0$ und die Ackermannfunktion a aus der Vorlesung. Kann f primitiv-rekursiv sein? Begründung!

Aufgabe 5. (**H** 2 + 2 + 2 Punkte)
Für Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$ ist die Operation 'markierte Vereinigung' $\oplus$ wie folgt definiert: $A \oplus B := \{0w \mid w \in A\} \cup \{1w \mid w \in B\}$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: Wenn A und B entscheidbar sind, so ist es auch $A \oplus B$.

b) Gilt auch die Umkehrung 'Wenn $A \oplus B$ entscheidbar ist, dann sind auch A und B entscheidbar'? Begründung!

c) Gilt die Aussage unter **b)** auch für die normale (unmarkierte Vereinigung? Begründung!