1. Übungsblatt: Grammatiken

Aufgabe 1. (**H** 1+1+2+1+2 Punkte)
Geben Sie Grammatiken für die folgenden Sprachen an:

1. $\{a^n \mid n \in I\!N\}$
2. $\{a^n b^n \mid n \in I\!N\}$
3. $\{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\}$
4. $\{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) = \#_b(x)\}$
5. $\{x \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(x) = \#_b(x) = \#_c(x)\}$

$\#_a(x)$ ist die Anzahl der Vorkommen von a in x.
Welchen Chomsky - Typ haben Ihre Grammatiken?

Aufgabe 2. (**H** 5 Punkte) Für die Sprache

$$L_d \;=\; \{\, x \mid |x| > 0,\ x \text{ ist eine zusammenhängende Folge in der Dezimaldarstellung von } 1/7 \text{ hinter dem Komma } \} \text{ über } \Sigma_2 = \{\, 0, 1, \ldots, 9\,\},$$

gebe man eine Grammatik G mit $L(G) = L_d$ von möglichst großem Chomsky - Typ an.

Aufgabe 3. (**H** 4 Punkte)
Sei $G = (\,\{A, B, S\},\ \{0, 1\},\ P,\ S,\,)$ eine Grammatik mit
$P = \{\, S \to 0AB,\ 1B \to 0,\ B \to SA,\ B \to 01,\ A1 \to SB1,\ A0 \to S0B\,\}$.
Man zeige, daß $L(G) = \emptyset$.

Aufgabe 4. (**H** 3+4 Punkte)
Man gebe eine reguläre Grammatik für die Sprache
$L = \{\, 0^n 1^m \mid n, m \geq 0,\ n \text{ gerade } \Leftrightarrow m \text{ ungerade }\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$ an und weise die Korrektheit nach.

Aufgabe 5. (**T**)
Eine Grammatik heißt *monoton*, wenn für jede ihrer Produktionen $\alpha \to \beta$ die Bedingung $|\alpha| \leq |\beta|$ gilt und *kontextsensitiv*, wenn jede Produktion die Form $\alpha A \gamma \to \alpha\beta\gamma$ mit $A \in V$ und $\beta \in (V \cup \Sigma)^+$ hat.

Man zeige, daß eine Sprache genau dann monoton ist, wenn sie kontextsensitiv ist.

Hinweis: Bei der Konstruktion einer kontextsensitiven Grammatik sind für die Simulation einer monotonen Produktion mehrere neue Produktionen und Variablen zu verwenden.

Aufgabe 6. (8 Punkte)
Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, X, A, A', L, R\}, \{a\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P \;=\; \{\, & S \to LA'aR, AR \to A'R, Aa \to aaA, aA' \to A'a, \\ & LA' \to LA, LA' \to X, Xa \to aX, XR \to \epsilon\}. \end{aligned}$$

1. (**H**) Zeigen Sie durch Induktionsbeweis, dass $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\} \subseteq L(G)$ gilt.
2. (**T**) Zeigen Sie, dass $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\} \supseteq L(G)$ gilt.

Erinnerung: Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben werden jeweils mündlich in den Übungsgruppen besprochen. Man sollte sich diese Aufgaben also entsprechend vor den jeweiligen Übungsgruppen ansehen. Die mit **H** gekennzeichneten Aufgaben sind hingegen von den Informatik-III-Studierenden vorzurechnen und deren Lösungen sind am 30.10.01 vor Vorlesungsbeginn im Eingangsbereich des N10 abzugeben.