Blatt 7

Aufgabe 1:

a) $S \to SS \mid xSy \mid \varepsilon$ mit $(x,y) \in \{(n,s),(s,n),(e,w),(w,e),(o,u),(u,o)\}$

Wie man sieht kommt es hier darauf an, dass der Taucher denselben Weg zurück geht, den er gekommen ist ($S \to xSy$).

b) Hier ist die Einschränkung aus a) nicht mehr da. Er muss zwar zurück, dies kann aber irgendwann und irgendwie beliebig später geschehen:

$S \to NSS' \mid ESW \mid OSU \mid \varepsilon$

$XY \to YX$ mit $X,Y \in \{N,S',E,W,O,U\}$

Von der Praxis her müsste man vielleicht noch sicherstellen, dass der Taucher nicht von der Wasseroberfläche nach oben tauchen will, aber naja ... ☺

c) Für jede Bewegung brauchen wir jetzt noch zusätzlich 7 mal E, um den Abtrieb auszugleichen. (auch bei E)

$S \to NSS'EEEEEE \mid ESWE^6 \mid OSUE^6 \mid \varepsilon$

$XY \to YX$ s.o.

Aufgabe 2:

$L_1 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \geq 2\,\#_b(w) \,;\, \#_a(w) - \#_b(w) = \mathbb{P}_t \}$

Betrachte $a^{2p}\, b^p$

Welche Zerlegungen gehen?

v, x bestehen nur aus a's oder beide nur aus b's. $\Rightarrow$ durch Pumpen wird $\#_a(w) - \#_b(w) \neq \mathbb{P}_t$

$vwx = a^m\, b^k$

1. $k \geq m \Rightarrow uv^2wx^2y$ hat $\#_a(w) < 2\#_b(w)$

2. $k < m \Rightarrow uv^i wx^i y = a^{2p+mi}\, b^{p+ki}$ mit $m = |v|$, $k = |x|$

Wenn das „drin" liegen soll, muss $2p + m \cdot i - (p + ki) =$ Primzahl q gelten.

Wähle nun $i = p$

$\Rightarrow 2p + mi - p - ki = p\underbrace{(1 + m - k)}_{\neq 1 \text{ wg. } k < m}$

$\Rightarrow p \cdot (1 + m - k)$ nicht Primzahl.

b) Nicht kontextfrei in 1b) sind gerade die Regeln, die das Umordnen erlauben, also wird gerade so ein umgeordnetes Wort Probleme geben. Geeignet ist jedes Wort, bei dem Hin- und Rückbewegung nicht nebeneinander stehen.

Betrachte $n^n e^n u^n s^n w^n o^n \in L_{1b)}$

Wegen $|vwx| \leq n$ muss vwx aus einem Buchstaben, der irgendwo hin- und einem, der nicht mehr zurück fährt oder umgekehrt bestehen.

$\Rightarrow$ Für $i \neq 1$ liegt das Wort nie in $L_{1b)}$

c) Betrachte $a^n b^{n^2} \in L_3$

$0 < |vwx| \leq n$ muss gelten. Wie kann ich also zerlegen?

1) $v, x \in \{a\}^* \Rightarrow uwy \notin L_3$

2) $v, x \in \{b\}^* \Rightarrow uv^2wx^2y \notin L_3$

3) $v \in \{a\}^+, x \in \{b\}^+ \Rightarrow uwy = a^{n-|v|} b^{n^2-|x|} \notin L_3$

weil $(n-|v|)^2 \leq (n-1)^2 = n^2-(2n-1) < n^2-n \leq n^2-|x|$

↯ zu $i^2 \geq j$

d) Betrachte $1^n 0^n \# 1^n 0^{n-1} 1 = uvwxy$

w muss $\#$ sein, sonst fehlt das $\#$ oder ich habe mehrere oder die Länge der Zahlen ist sofort falsch

$\Rightarrow |vwx| \leq n \Rightarrow uwy \notin L_4$ (Zahl falsch ...)

e) Betrachte $1^n 0^n 1^n 0^n = uvwxy$ $uv^2wx^2y \notin L_5$

$v, x \in \{(0^+1^+), (1^+0^+)\}$ gibt keinen Sinn, daher

mit $|vwx| \leq n \Rightarrow 1^{n+|v|} 0^{n+|x|} 1^n 0^n \notin \overline{L_5}$

$1^n 0^{n+|v|} 1^{n+|x|} 0^n \notin \overline{L_5}$

$1^n 0^n 1^{n+|v|} 0^{n+|x|} \notin \overline{L_5}$

Aufgabe 3

a) Blatt 5 - Aufgabe 5:

$L_5 = \{x \in \{0,1\}^+ \mid x \neq ww \text{ für } w \in \{0,1\}^+\}$

$P_5: S \to EN \mid NE \mid N \mid E$

$N \to 0 \mid TNT$

$E \to 1 \mid TET$

Für ungerade Wortlängen liegt es immer drin, für gerade ist garantiert, dass das N in TNT später dasteht wo das E in TET ist... (bei ww)

$\Rightarrow L_5$ ist kontextfrei

Wie in Aufgabe 2 gezeigt, ist $\overline{L_5}$ aber nicht kontextfrei.

Damit können die Typ2-Sprachen nicht komplement-abgeschlossen sein...

b) Nehmen wir die Meerestauch wörter aus 1a) und teilen sie in $L_{ns}: S \to nSs \mid sSn$

$L_{ew}: S \to eSw \mid wSe$

$L_{ou}: S \to oSu \mid uSo$

Die sind alle kontextfrei.

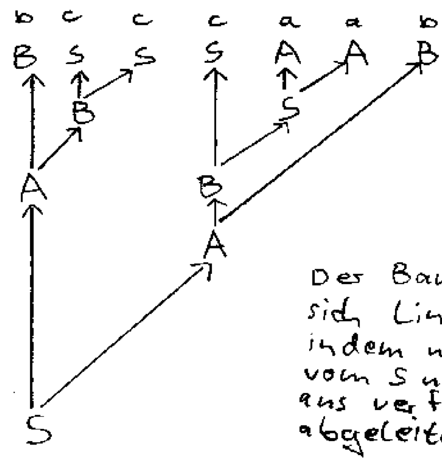
$L_{1a)}$ ist nun aber gerade $L_{ns} \sqcup L_{ew} \sqcup L_{ou}$ und wie in 2 gezeigt aber eben gerade nicht Typ 2

$\Rightarrow$ Typ 2 - Sprachen sind im Ggs. zu Typ 3-sprachen (→ Blatt 6) nicht $\sqcup$ - abgeschlossen

Aufgabe 4

a)

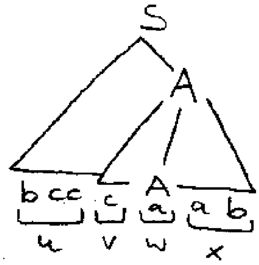
b	c	c	c	a	a	b
B	S	S	S	A	A	B
/	B	B	/	S	/	X
A	/	/	B	/	X	X
/	/	/	A	X	X	X
/	A	/	X	X	X	X
/	/	X	X	X	X	X
S	X	X	X	X	X	X



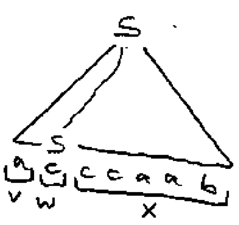
Der Baum Lässt sich Links ablesen, indem man einfach vom S unten Links aus verfolgt, wohin abgeleitet wird.

hier steht S, also Liegt das Wort in der Sprache

b) Wie man im Beweis zum PL 2 sieht, kann man so vorgehen, dass man vom Start aus sucht, wann ein Nonterminal in seiner Ableitung nochmal vorkommt.
Das ist gerade bei dem A rechts der Fall, daher



Es ginge auch z.B.



etc.

$uv^iwx^iy \in L$ gilt, weil im Baum nur gültige Ableitungsschritte vorkommen und ich damit natürlich an jedes A oben bzw S links den entsprechenden Teilbaum rekursiv anhängen kann oder eben nicht.

$\Rightarrow$ Greibach - Normal - Form

1. Alle Regeln in CNF
2. Alle Non-Terminale in $A_1 \dots A_m$ umbenennen
3. Alle Regeln auf die Form $A_i \Rightarrow A_j \alpha$ $\underline{i \leq j}$ bringen (Regeln, die nur auf ein Terminal gehen sind schon o.k.).

   Dazu in die entsprechenden Regeln sukzessiv immer für das A_j die rechte Seite der $A_j \rightarrow$ Regel einsetzen, bis alle Regeln die Form $A_i \Rightarrow A_j \alpha$ $i \leq j$ haben

4. Bei allen Regeln der Form $A_i \Rightarrow A_i \alpha$ Folgendes tun:

$$A_i \Rightarrow A_i \alpha_1 | \dots | A_i \alpha_k | \beta_1 | \dots | \beta_l$$

   wird zu: $A_i \Rightarrow \beta_1 | \dots | \beta_l | \beta_1 B_i | \dots | \beta_l B_i$

$$B_i \Rightarrow \alpha_1 | \dots | \alpha_k | \alpha_1 B_i | \dots | \alpha_k B_i$$

   (solange, bis keine der Form $A_i \Rightarrow A_i \alpha$ mehr da; korrektheit $\Rightarrow$ S. 54 F)

   Insbesondere die Regel mit dem größten Index $A_m \Rightarrow$ geht jetzt auf etwas über, was mit nonterminal beginnt.

5. Jetzt bei allen Regeln $A_i \rightarrow A_m \alpha$ A_m durch seine rechte Seite ersetzen. z.B. wenn $A_m \Rightarrow \delta | \sigma | \vartheta$

$$A_i \Rightarrow A_m \alpha$$
$$\Rightarrow A_i \Rightarrow \delta \alpha | \sigma \alpha | \vartheta \alpha$$

   Dann bei allen $A_i \Rightarrow A_{m-1} \alpha$ A_{m-1} einsetzen etc.

   $\Rightarrow$ Alle A-Regeln beginnen mit Non-Terminal.

6. Bleiben die B-Regeln:

   Bei allen $B_i \Rightarrow A_j \alpha$ die rechten Seiten der A_j einsetzen

7. Fertig.

Aufgabe 5 (→ S. 54f)

gesucht: Greibach-Normalform zu

$$S \Rightarrow A0 \mid 0 \;,\; A \Rightarrow SS \mid 1$$

1. in CNF:

$$S \Rightarrow AX_0$$
$$S \Rightarrow 0$$
$$A \Rightarrow SS$$
$$A \Rightarrow 1$$
$$X_0 \Rightarrow 0$$

2. umbenennen

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3$$
$$A_1 \Rightarrow 0$$
$$A_2 \rightarrow A_1 A_1$$
$$A_2 \Rightarrow 1$$
$$A_3 \Rightarrow 0$$

3. $A_i \Rightarrow A_j \alpha$ mit $i \geq j$ sollen weg:

$A_2 \Rightarrow A_1 A_1$ ist die einzige problematische

$\Rightarrow$ Füge hinten $A_2 \Rightarrow 0 A_1 \mid A_2 A_3 A_1$

$A_2 \rightarrow A_2 A_3 A_1$: hat Form $A_i \rightarrow A_i \alpha \Rightarrow$ Vorüberlegung

$$\Rightarrow A_2 \Rightarrow \overset{B_1}{1} \mid \overset{B_2}{0A_1} \mid \overset{B_1 B_1}{1B_1} \mid \overset{B_2\,B_1}{0A_1B_1} \;;\; B_1 \rightarrow A_3 A_1 \mid A_3 A_1 B$$

Wir haben:

$$A_1 \Rightarrow A_2 A_3 \mid 0$$
$$A_2 \Rightarrow 0A_1 \mid 1 \mid 0A_1B_1 \mid 1B_1$$ (beginnen alle mit Terminal
$$A_3 \Rightarrow 0$$
$$B_1 \Rightarrow A_3 A_1 \mid A_3 A_1 B$$

Die Regeln mit größtem Index beginnen jetzt alle mit Terminal ⇒ durch Einsetzen in die „kleineren" beginnen dann alle A-Regeln mit Terminal.

$\Rightarrow A_2$ oben einsetzen $\Rightarrow$

$A_1 \Rightarrow 0A_1A_3 \mid 1A_3 \mid 0A_1B_1A_3 \mid 1B_1A_3 \mid 0$

$A_2 \Rightarrow 0A_1 \mid 1 \mid 0A_1B_1 \mid 1B_1$

$A_3 \Rightarrow 0$

$B_1 \Rightarrow A_3A_1 \mid A_3A_1B$

$\Rightarrow$ In das erste Nontominal der B-Regeln die entsprechenden A-Regeln einsetzen $\Rightarrow$

$B_1 \Rightarrow 0A_1 \mid 0A_1B$

$\Rightarrow A_1 \Rightarrow 0A_1A_3 \mid 1A_3 \mid 0A_1B_1A_3 \mid 1B_1A_3 \mid 0$

$A_2 \Rightarrow 0A_1 \mid 1 \mid 0A_1B_1 \mid 1B_1$

$A_3 \Rightarrow 0$

$B_1 \Rightarrow 0A_1 \mid 0A_1B$

Aufgabe 6

$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i=0 \text{ oder } j=k=l,\ i,j,k,l \geq 0\}$

Für L gilt PL2, weil:

1. $uvwxy = a^i b^j c^j d^j$ (es gibt mind. 1a)
   Wähle $v = a \Rightarrow u v^i w \in L \ \forall i$
   bzw. $v = a,\ w = x = \varepsilon \Rightarrow u v^i w x^i y \in L \ \forall i$

2. $uvwxy = b^j c^j d^j$ (es gibt kein a)
   $\Rightarrow$ jeder Buchstabe ist „pumpable"
   z.B. $v = c,\ w = x = \varepsilon \Rightarrow u v^i w x^i y \in L$

Sei $M = \{a b^j c^k d^l \mid j,k,l \in \mathbb{N}\}$. Die ist regulär
(Bei Bedarf Grammatik bauen).

$L \cap M$ ist nun gerade $\{a b^m c^m d^m \mid m \in \mathbb{N}\}$
Die ist aber nicht kontextfrei (→ S. 61).

$\Rightarrow$ ↯