Blatt 5

Aufgabe 1:

Z: $L = \{a^n b^k c^m \mid n,k,m > 0$ und $n = 2k - m\}$ ist nicht regulär.

Das PL besagt:

L ist regulär $\Leftrightarrow \exists n \ \forall x \in L$ mit $|x| \geq n$ existiert Zerlegung $x = uvw$
mit 1. $|v| \geq 1$
2. $|uv| \leq n$
3. $\forall i \in \mathbb{N} \ uv^iw \in L$

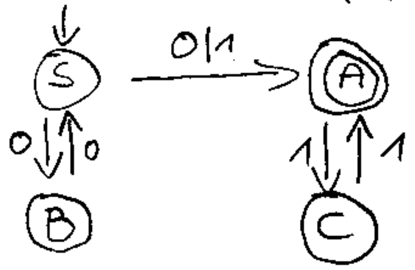
Also wählen wir uns ein $x \in L$ mit $|x| \geq n$, nämlich $x = a^n b^n c^n$.

Da $|uv| \leq n$ kann v schonmal nur aus a's bestehen.
wegen $|v| \geq 1$ gilt $v = a^j$ mit $j \geq 1$.
3. sagt nun $\forall i \in \mathbb{N} \ uv^iw \in L$, also muss auch $uv^0w \in L$ sein.
uv^0w ist aber gerade $a^{n-j} b^n c^n$ und das $\notin L$.

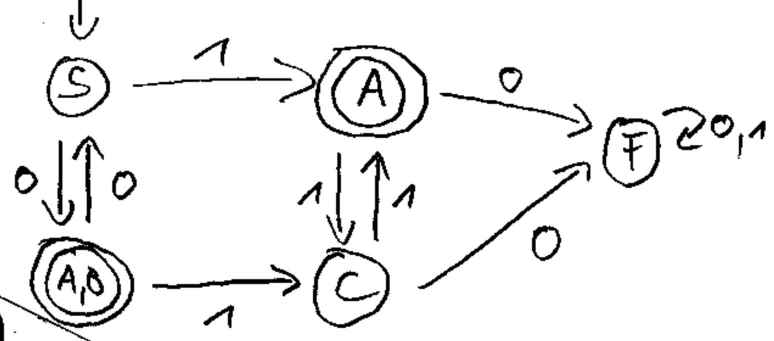
Also kann L nicht regulär sein.

Aufgabe 2:

1. NFA zu $(00)^*(0|1)(11)^*$



2. DFA dazu:



3. Ist der minimal:

A	X			
(A,B)	X	O		
C	O	X	X	
F	O	X	X	O
	S	A	(A,B)	C

a) X (alle mit EZ)

b) O $\{C,S\} \xrightarrow{0} \{(A,B),F\}$

$\{F,S\} \xrightarrow{0} \{(A,B),F\}$ oder $\{F,S\} \xrightarrow{1} \{F,A\}$

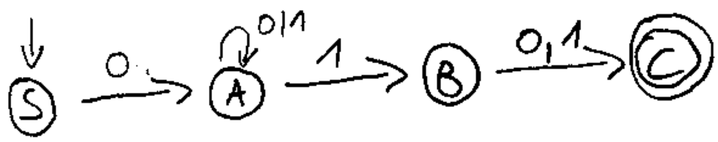
$\{F,C\} \xrightarrow{1} \{A,F\}$

$\{(A,B),A\} \xrightarrow{0} \{F,S\}$

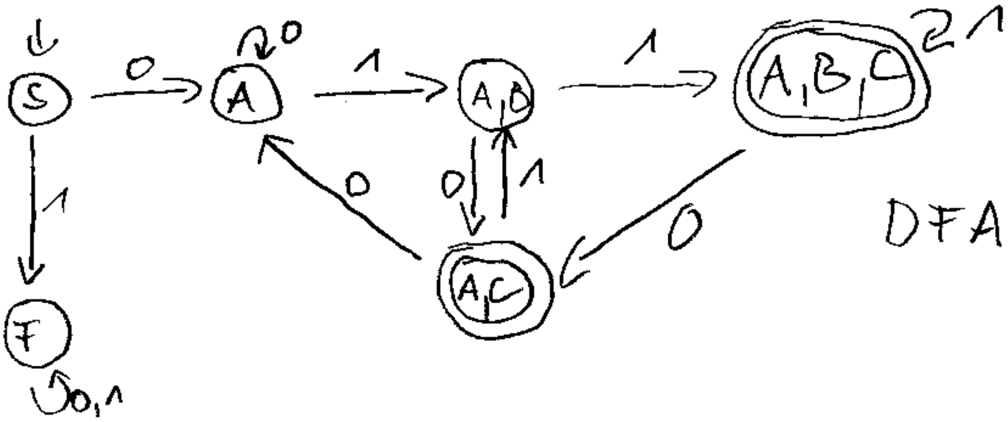
$\Rightarrow$ Er ist minimal

Aufgabe 3:

a) $0(0|1)^* 1 (0|1)$



NFA



DFA

minimal?

A	X				
(A,B)	x	X			
(A,B,C)	X	X	X		
F	x	x	X	x	
(A,C)	X	x	x	X	X
	S	A	(A,B)	(A,B,C)	F

→ ja

b) $[\varepsilon]$

$[0] = \{0, 00\} \cup \{0y00 \mid y \in \Sigma^*\}$

$[1] = \{1y \mid y \in \Sigma^*\}$

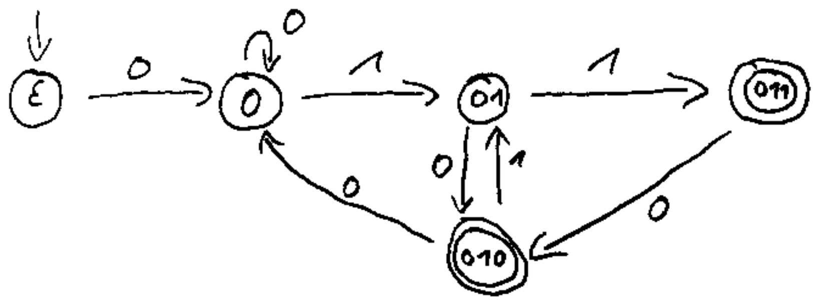
$[01] = \{0y01 \mid y \in \Sigma^*\}$

$[010] = \{0y10 \mid y \in \Sigma^*\}$

$[011] = \{0y11 \mid y \in \Sigma^*\}$

Die Aussage $x R_L y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* \; (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$ bedeutet nichts anderes, als dass für alle Vertreter der Klasse gilt: Unter der gleichen Eingabe z gelange ich von jedem Vertreter der Klasse aus in denselben Zustand.

Das Lässt sich veranschaulichen, indem man den Automaten entsprechend beschriftet:



An diesem Automat sieht man sehr gut, dass die Äquivalenzklassen paarweise verschieden sind.

(Das ist auch klar, denn wären noch zwei gleiche dabei könnte man weiter minimalisieren)

Aufgabe 4:

a) Jedes Wort aus L_1 ist gerade durch die Anzahl der a's bzw. b's charakterisiert. Es Liegt also nahe, eine Einteilung in Äquivalenzklassen:

$[a^x] = \{$Wörter mit x vielen a's mehr als b's$\}$

⋮

$[a^x b^x] = \{$Wörter mit gleich vielen a's wie b's$\}$

$[b^x] = \{$w mit x vielen b's mehr als a's$\}$

Bleibt zu zeigen, dass es von den $[a^x]$ z.B. schon unendlich viele paarweise verschiedene gibt.

Es gilt $[a^m] \neq [a^n]$ für $m \neq n$.

Erzeuge ich durch Anhängen $a^m b^m$ lande ich in $[a^x b^x]$.

Ansonsten im entspr. $[a^x]$ bzw. $[b^x]$ für $a^x b^y$, $x \neq y$.

Also sind die paarweise verschieden (sonst landete ich unter dem selben z mit Wörtern aus verschiedenen Äquivalenzklassen in derselben Äquivalenzklasse...)

b) $[a^n b]\, b^n c^n \neq [a^m b]\, b^n c^n$ Für $n < m$

paarweise verschieden, da $a^n b\, b^n c^n \in L$, aber $a^m b b^n c^n \notin L$

c) $[b_n f] \neq [b_m f]$ Für $n \neq m$

$b_n f b_{n+1}^R \in L$, aber $b_m f b_{n+1}^R \notin L$

d) $[a^n] \neq [a^m]$ Für $n \neq m$

$a^n b^n \in L$, aber $a^m b^n \notin L$

e) nicht regulär, da L_4 = Komplement nicht regulär und darunter sind Typ 3 Sprachen abgeschlossen.

f) $[0^n 1] \neq [0^m 1]$ Für $m \neq n$

$0^n 1 0^n 1 \notin L$, $0^n 1 0^m 1 \in L$

---

b) So wie sie auf dem Blatt steht ist die b) regulär, da sie nur $\varepsilon, c, ac, bc, abc$ enthält und maximal folgende Restklassen hat:

$[\varepsilon]$

$[a]$ $[ab]$ $[abc]$

$[b]$ $[ac]$

$[c]$ $[bc]$

$i, j, k \geq 0$ sollte natürlich gelten, damit sie Typ 2 ist...

Aufgabe 5:

$L_3 = \{ b_n f b_{n+1}^R \mid n \geq 1 \}$ R = Spiegelung

$S \Rightarrow 1A01 \mid 1B1$

$A \Rightarrow 1A0 \mid f$

$B \Rightarrow 1B1 \mid 0B0 \mid 0A1$

$\overline{L_4} = \{ x \in \{a,b\}^* \mid x \notin L_4 \}$

$S \Rightarrow a \mid b \mid CS \mid SC \mid aA \mid Aa \mid bB \mid Bb$

$C \Rightarrow CC \mid aCb \mid bCa \mid ab \mid ba$

$A \Rightarrow AA \mid a \mid C$

$B \Rightarrow BB \mid b \mid C$

$L_5 = \{ x \in \{0,1\}^+ \mid x \neq ww,\ w \in \{0,1\}^+ \}$

$S \Rightarrow EN \mid NE \mid N \mid E$

$N \Rightarrow 0 \mid TNT$

$T \Rightarrow 0 \mid 1$

$E \Rightarrow 1 \mid TET$

Aufgabe 6:

a) $Index(R_L')$ endlich $\Rightarrow L$ regulär

Wir müssen zeigen, dass R_L' eine Verfeinerung von R_L ist, also die Äquivalenzklassen von R_L nochmal unterteilt.
Dann wissen wir nämlich $Index(R_L) \leq Index(R_L')$ und nach S. 41 Schöning ist L damit regulär, weil der Index von R_L endlich ist.

$x R_L' y :\Leftrightarrow \forall w, z \in \Sigma^* \; (wxz \in L \Leftrightarrow wyz \in L)$

($\forall w, z \in \Sigma^*$ heisst insbesondere auch für $w = \varepsilon$)

$\Rightarrow \forall w = \varepsilon, z \in \Sigma^* \; (wxz \in L \Leftrightarrow wyz \in L)$

$\Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* \; (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L) \Leftrightarrow: x R_L y$

b) L ist regulär $\Rightarrow Index(R_L')$ endlich $\square$

Unter dem Automat M, der zu R_L gehört stehen zwei Wörter in Relation, wenn gilt:

$x R_M y \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$ ... wir gehen also immer in q_0 los

Beim Automat M' zu R_L' ist das mehr:

$x R_M' y \Leftrightarrow \forall q \quad \hat{\delta}(q, x) = \hat{\delta}(q, y)$ ... wir gehen also irgendwo los

Es gilt:

$$wxz \in L \Leftrightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, w)}_{q}, x), z) \in E$$
$$\Leftrightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, w)}_{q}, y), z) \in E$$
$$\Leftrightarrow wyz \in L$$

$\Rightarrow Index(R_M') \leq |q|^{|q|}$ (mehr Zustände können nicht erreicht werden durch die Relation)

$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil } R_M' \text{ worst case für } R_L'}}{Index(R_L') \leq} Index(R_M') \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \#\text{Zust. unser geg. reg. Automat}}}{|q|^{|q|}} < \infty$