Blatt 3

Aufgabe 1:

Es soll also $\alpha \in (V \cup \Sigma)^* \setminus \Sigma^*$ sein. D.h. α ist irgend was aus Variablen und Terminalsymbolen, das nicht nur Terminalsymbole enthält. Also gerade $(V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$, da dieser reguläre Ausdruck garantiert, dass α irgend wo mindestens eine Variable enthält.

Formal:

$|\alpha|$ muss mind. Länge 1 haben, sonst wird nichts abgeleitet.

$\Rightarrow \alpha \in (V \cup \Sigma)^* \setminus \Sigma^* = (V \cup \Sigma)^* X (V \cup \Sigma)^* \setminus \Sigma^*$

Das X garantiert uns Länge $|\alpha| \geq 1$.

Woraus kann α sein? Aus V oder Σ.

Nehmen wir an $X \in \Sigma$, dann folgt das α wieder leer sein kann, weil dann ja $X \setminus \Sigma^* = \emptyset$ mit $X \in \Sigma$ ↯

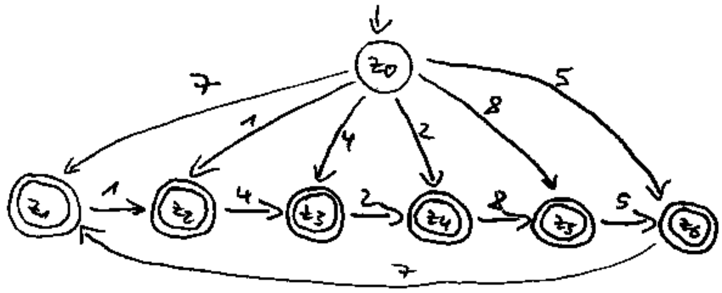
Folglich muss $X \in V$ gelten und dann kann man das „$\setminus \Sigma^*$" weglassen, weil sowieso nichts mehr, das nur aus Terminalen besteht erzeugt werden kann.

Anmerkung:

$\emptyset \notin (V \cup \Sigma)^* \setminus \Sigma^*$ (Unsere Annahme $|\alpha| \geq 1$ steht also in der Aufgabe...)

Die leere Menge ist deshalb keine Teilmenge, weil sie schon in Σ^* enthalten ist und das wird ja ~~gerade~~ abgezogen.

Aufgabe 2:



$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}, \{1, 4, 2, 8, 5, 7\}, \delta, z_0, \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\})$

$\delta(z_0, 7) = z_1 \qquad \delta(z_1, 1) = z_2$

$\delta(z_0, 1) = z_2 \qquad \delta(z_2, 4) = z_3$

$\delta(z_0, 4) = z_3 \qquad \delta(z_3, 2) = z_4$

$\delta(z_0, 2) = z_4 \qquad \delta(z_4, 8) = z_5$

$\delta(z_0, 8) = z_5 \qquad \delta(z_5, 5) = z_6$

$\delta(z_0, 5) = z_6 \qquad \delta(z_6, 7) = z_1$

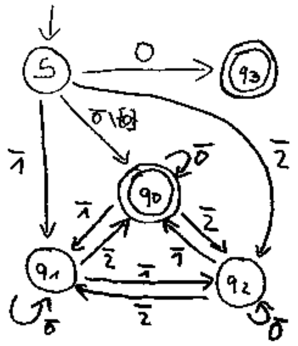
Aufgabe 3:

Wann ist eine Zahl durch 3 teilbar? Wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Die Quersumme ist Element von $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Die Menge lässt sich noch gruppieren in

$0 \bmod 3 = \bar{0} = \{0,3,6,9\}$
$1 \bmod 3 = \bar{1} = \{1,4,7\}$
$2 \bmod 3 = \bar{2} = \{2,5,8\}$



q_3 brauchen wir, weil keine führenden Nullen, wohl aber eine einzelne erlaubt sind.

$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, S\}, \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \delta, S, \{q_0\})$

$\delta(S,0) = q_3$
$\delta(S,\bar{0}\setminus\{0\}) = q_0$
$\delta(S,\bar{1}) = q_1$
$\delta(S,\bar{2}) = q_2$

$\delta(q_0,\bar{0}) = q_0 \quad \delta(q_0,\bar{1}) = q_1 \quad \delta(q_0,\bar{2}) = q_2$
$\delta(q_1,\bar{0}) = q_1 \quad \delta(q_1,\bar{1}) = q_2 \quad \delta(q_1,\bar{2}) = q_0$
$\delta(q_2,\bar{0}) = q_2 \quad \delta(q_2,\bar{1}) = q_0 \quad \delta(q_2,\bar{2}) = q_1$

Für eine einzelne 0 ist die Korrektheit klar.
Wir beweisen, dass für alle anderen Eingaben gilt:

$$\hat{\delta}(S,x) = q_i \iff x \equiv i \bmod 3$$

Induktion über die Länge der Eingabe x:

I.A. $|x| = 1$ ✓ (Vor allem aufgrund der gewählten Bezeichnungen klar)

I.B.: Für $|x| = n$ gelte $\hat{\delta}(S,x) = q_i \iff x \equiv i \bmod 3$

I.S.: $|\hat{x}| = n+1 \Rightarrow \hat{x} = x \circ x_{n+1}$

$$\hat{\delta}(S,\hat{x}) = \delta(\hat{\delta}(S,x), x_{n+1}) = \delta(q_i, x_{n+1}) = q_j \iff i + x_{n+1} \equiv j \bmod 3$$

gilt anhand unserer Konstruktion oben $\square$

Wir haben gez.: 1) x ist durch 3 teilbar ($3|x$, $x \equiv 0 \bmod 3$)
$\iff \hat{\delta}(S,x) = q_0$
$\iff M$ akzeptiert

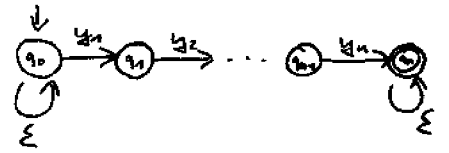
2) Eine Null ($x=0$) wird akzeptiert

3) Bei $|x|>1$ kann x nicht mit 0 beginnen (Es gibt dafür keine Pfeile).
D.h. führende Nullen werden nicht akzeptiert.

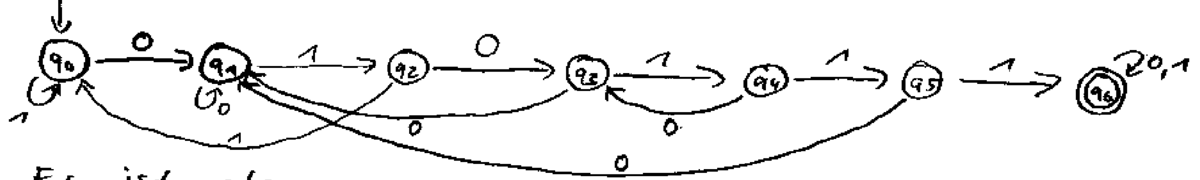
Damit gilt $T(M) = L_1$.

Aufgabe 4:

a) Sei $y = y_1 \cdots y_n$



b) Deterministisch heisst: Für jeden Zustand darf es für jede Eingabe immer nur einen Pfeil geben, der mit dieser Eingabe ~~beschriftet~~ ist.
Das Beispiel muss folglich so realisiert werden:

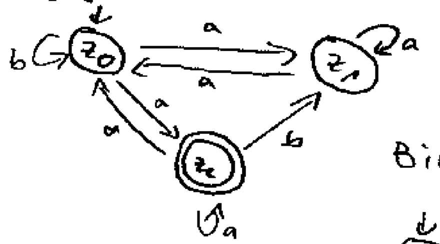


Es ist also zu berücksichtigen, dass ein Infix von y auch zugleich Präfix von y sein kann, d.h. wenn ich z.B. 01010... lese, so wandere ich ja $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{1} \cancel{q_4} \xrightarrow{0} q_3 \ldots$

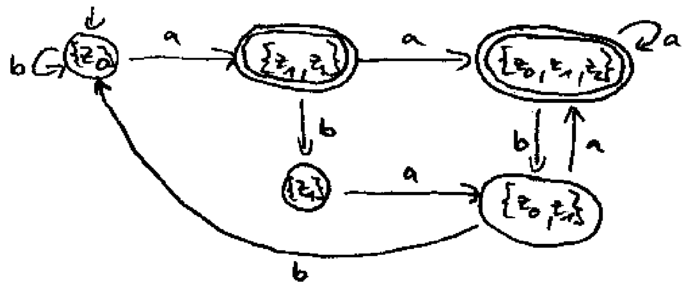
Ich muss also nicht komplett zurück springen, sondern nur so weit, wie ich schon wieder als neues Präfix von y gelesen habe (010).

Aufgabe 5:

Der geg. Automat sieht so aus:



Bilden wir den deterministischen dazu:



Wie ging das?

- Die Bezeichnungen der Zust. sind jetzt Mengen.
- Startzustand ist jetzt also derjenige mit der Menge aus allen Startzuständen des NFA als Bezeichnung.
- Schau für jede Eingabe aus Σ bei jedem Zustand Deiner Menge, wohin Du mit der Eingabe kommst und schreib' die Menge dieser Zustände in einen neuen Kreis, zu dem Du den Pfeil mit der betrachteten Eingabe zeichnest.
- Wiederhole den letzten Schritt für alle Kreise (Zustände), die Du erhältst.
- Alle neuen Zustände, die in ihrer Bezeichnermenge einen Endzustand haben sind solche!!