Blatt 14

Aufgabe 1:

a) 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0

0 1 0 1 1 0 0 1 0 0

(1, 2, 3, 3)

b) Es gibt nur zwei mögliche Anfänge:

1 1 1

1

hier geht's nicht sinnvoll weiter...

0 1

0 1 0 1 1

Hier ginge es zwar weiter, aber jedes andere Paar hat oben so viele Nullen wie unten.

⇒ Es bleibt immer mind. eine Null unten übrig...

⇒ nicht lösbar (wichtig hier, dass Ihr alle Mglkt. diskutiert!)

c) 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1

0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1

(3, 4, 2, 1, 4)

d) 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1

0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1

(1, 1, 5, 2, 5, 4, 6)

Aufgabe 2:

Wir zeigen: PCP $\leq$ Grammatik Palindrome

geg. PCP $(v_1,w_1),\dots,(v_k,w_k) \in (\Sigma^* \times \Sigma^*)$

Sei G gegeben durch $P = \{S \Rightarrow v_i S w_i^R \mid \# \mid (v_i,w_i) \in$ Eingabe in PCP$\}$

Damit ist auch schon die Reduktionsfkt. geg.
und es gilt:

$$\exists\, v_{i_1} \dots v_{i_n} = w_{i_1} \dots w_{i_n} \Leftrightarrow v_{i_1} \dots v_{i_n} \# w_{i_n}^R \dots w_{i_1}^R \in L(G)$$

Folglich PCP $\leq$ Gr., die Palindrome erz.

$\Rightarrow$ unentscheidbar.

Aufgabe 3:

Ja, das unäre PCP ist entscheidbar, denn:
Es gibt keine Lsg., wenn

- $\forall i \leq k \quad v_i < w_i$ ($\Rightarrow$ re. S. zu lang)
- $\forall i \leq k \quad v_i > w_i$ ($\Rightarrow$ li. S. zu lang)

Wenn $\exists\, i \leq k \quad v_i = w_i$ ist das die Lsg.
Ansonsten gilt $\exists \quad v_i > w_i$ und $\exists\, v_j < w_j$

$$\Rightarrow v_i^{|w_j|-|v_j|} v_j^{|v_i|-|w_i|} = w_i^{|w_j|-|v_j|} w_j^{|v_i|-|w_i|}$$

ist eine Lösung.

(Mehr Fälle gibt es nicht!)

Aufgabe 4:

a) Die det. KF. Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen (→ S. 89).

$$L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \Leftrightarrow \overline{L_1 \cup L_2} = \overline{\Sigma^*}$$

$$\Leftrightarrow \overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \emptyset$$ und das ist unentscheidbar (→ S. 139)

b) Wir betrachten den Spezialfall $L_1 = \Sigma^*$.
L_2 ist det. KF., also in jedem Fall KF.
⇒ Satz S. 140 gilt und besagt:
L_1 regulär und L_2 kontextfrei
⇒ $L_1 = L_2$? unentscheidbar

c) Nein, denn zu jeder regulären Sprache kann ich einen DLBA angeben.
Dieser wiederum lässt sich in eine eindeutige Grammatik verwandeln.
Folglich ist das Grammatikproblem entscheidbar, nämlich immer „Nein".

d) Es ist unentscheidbar, ob: L' ist Typ 2; $L' = \Sigma^*$?

Wir bauen uns $L := L'\$\Sigma^* \cup \Sigma^*\$\{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ oder } j=k\}$
($a, b, c \in \Sigma^*$, aber $\$ \notin \Sigma^*$)

inhärent mehrdeutig (S. 25)

Wenn nun $L' = \Sigma^* \Leftrightarrow L = \Sigma^*\$\Sigma^* \Leftrightarrow$ regulär
⇒ entscheidbar (immer eindeutig)

Wenn aber $L' \neq \Sigma^*$, so gilt für ein $u \notin L'$, dass es aus $\Sigma^*\$\{a^i b^j c^k \mid \ldots\}$ in die Vereinigung gekommen sein muss und somit ist die zugehörige Grammatik inhärent mehrdeutig ... (⇒ $L' = \Sigma^*$ entscheidbar ⇔ d) entsch.)