Informatik 3 - Blatt 0

Aufgabe A: $A=\{a,b,c\}$; $B=\{a,x,y,z\}$

1. $A\cap B=\{a\}$; $A\cup B=\{a,b,c,x,y,z\}$
   $A-B=A\setminus B=\{b,c\}$; $B-A=B\setminus A=\{x,y,z\}$
2. Potenzmenge $P(X)$: Mg aller Teilmengen
   $P(A)=P(\{a,b,c\})=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$
3. Kreuzprodukt $X\times Y$
   $A\times A\setminus B=\{a,b,c\}\times\{b,c\}=\{(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$

Aufgabe B:

1. A mit $|A|=m$
   $|P(A)|$?
   Möglichkt. 1: Wahrscheinlichkeitstheoretisch
   Seien o.B.d.A. die Elemente von $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$
   Dann ist jedes Element von $P(A)$ ja gerade $\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, wobei die Variablen entweder vorhanden oder nicht vorhanden sind, soll heissen bei $\emptyset$ sind z.B. alle nicht vorhanden, bei $\{a_1\}$ ist nur a_1 vorhanden etc.
   Jede Variable hat also zwei mögliche Zustände und es gibt m Variablen $\Rightarrow 2^m$
   Möglichkeit 2: Induktion nach $|A|=m$
   I-Anfg.: $|A|=m=0 \hat{=} A=\emptyset \Rightarrow P(A)=\{\emptyset\}$ $\neq\emptyset$! $\Rightarrow |P(A)|=1=2^0$ ✓
   I-Annahme: $|A|=m \Rightarrow |P(A)|=2^m$
   I-Schritt: $|A'|=m'=m+1 \hat{=}$ o.B.d.A. $A'=A\,\dot\cup\,\{z\}$ disjunkte Vereinigung $z\notin A$
   $\Rightarrow P(A')=P(A)\,\dot\cup\,\{\lambda \mid \forall t\in P(A)\ \lambda=t\,\dot\cup\,\{z\}\}$
   $\Rightarrow |P(A')|=|P(A)|+|P(A)|=2\cdot|P(A)|=2^1\cdot 2^m=2^{m+1}$
   □
2. $A\times B$: $|A|=m$; $|B|=n$. $|A\times B|=$?
   Kreuzprodukt = Tupel „Jeder aus A wird mit jedem aus B kombiniert"
   $\Rightarrow |A\times B|=|A|\cdot|B|$
   Formaler Beweis per Induktion über $|B|=n$
   I-Anfg $|B|=n=0 \hat{=} B=\emptyset \Rightarrow A\times B=A\times\emptyset=\emptyset \wedge |\emptyset|=0$ ✓
   anschaulich: „Es gibt keine Tupel", keine Fläche
   $|B|=n=1$
   $\Rightarrow A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$
   gibt nur eins...
   $|A\times B|=|A|=|A|\cdot 1=|A|\cdot|B|$ ✓

I-Annahme: $|B| = n \Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n$

I-Schritt: $|B'| = n' = n+1$

$\Rightarrow A \times B' = A \times B \,\dot\cup\, A \times B' \setminus B$ wobei ja $|B' \setminus B| = 1$

$\Rightarrow |A \times B'| = |A| \cdot |B| + |A| \cdot 1 = |A| \cdot (|B| + 1)$ $\square$

<u>Aufgabe C:</u>

$|X| = |Y| \Leftrightarrow \exists\ f: X \to Y$ mit f bijektiv

gdw ⇒ zum beweisen „⇒" & „⇐" !

Was heisst bijektiv?

Injektiv = ein-eindeutig $\forall x, y \in X \ \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

+ Surjektiv = $(\mathrm{Im} f = B)$ $\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ f(x) = y$

Widerspruchsbeweis „⇏" reicht zum Widerlegen

(Für X, Y endlich, Für abzählbar unendliche Mg. ⇒ Schöning S. 186)

z: $|A| = |P(A)|$, also $f: A \to P(A)$ mit f bij. existiert.

Versuche f zu konstruieren:

f muss injektiv sein, also o.B.d.A. $f(a) = \{a\}\ \forall a \in A$.

Damit kann f aber nicht surjektiv sein, denn $f(?) = \emptyset$

? gibt es nicht! Alle $a \in A$ wurden abgebildet !

$\lightning$

<u>Aufgabe D:</u>

Relation? Teilmenge von $A \times B$ mit bestimmter Eigenschaft $\square$

Was kann eine Relation sein? (hier Relation ρ in A, also $\rho \subseteq A \times A$)

symmetrisch $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ antisymmetrisch $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ höchstens für $a=b$

asymmetrisch $a\rho b \Rightarrow (b,a) \notin \rho$

transitiv $a\rho b, b\rho c \Rightarrow a\rho c$

reflexiv $a\rho a$ antireflexiv $(a,a) \notin \rho\ \forall a \in A$

1. $s < s'$ „kleiner als" asymm., transitiv, antireflexiv ⇒ strenge Ordnungsrelation
2. $s \approx s'$ „gleich groß" symm., transitiv, reflexiv ⇒ Äquivalenzrelation (z.B. Modulo)

$[s] = \{s' \in K \mid s \approx s'\}$ ≙ „alle gleich großen"

d.h. $[s]$ sind Äquivalenzklassen; alle zusammen bilden K.

z: $[s] \leq_1 [s'] \Leftrightarrow [s] \leq_2 [s']$
$\quad\ \ \exists \qquad\qquad\quad\ \forall$

„⇐" klar ✓

„⇒" $\exists x \in [s], x' \in [s']\ \ x < x'$ $\forall a \in [s], a' \in [s']$ gilt doch $a \approx x < x' \approx a'$.

Folglich ist es egal, welchen Vertreter ich nehme...

Aufgabe E:

Sprache EXPR ist Erzeugnis der Grammatik G.

Grammatik? $G=(V, \Sigma, P, S)$

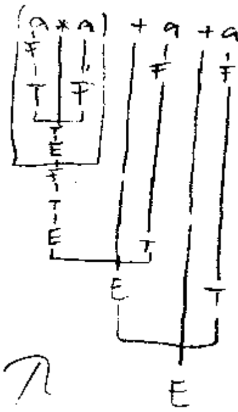
Variablen, Terminalalphabet, Produktionen, Startvariable

hier $G=(\{E,T,F\}, \{(,),a,+,*\}, P, E)$

$P=\{ E \Rightarrow T,$
$E \Rightarrow E+T,$
$T \Rightarrow F,$
$T \Rightarrow T*F,$
$F \Rightarrow a,$
$F \Rightarrow (E)\}$

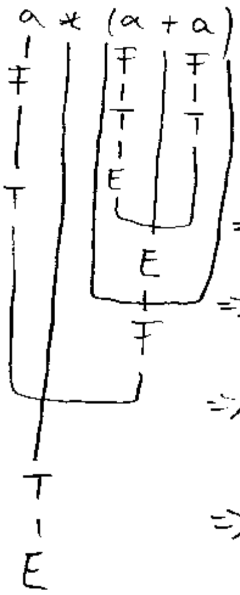
$A \Rightarrow a \mid aB$	Typ 3 - regulär
$A \Rightarrow a \mid MNoP$	Typ 2 - kontextfrei
$aBa \Rightarrow abba \mid aMNba$	Typ 1 - kontext sensitiv
Grammatik	Typ 0
Rest	

Weitere Wörter in EXPR:



$\Rightarrow (a*a)+a+a$
$\Rightarrow (F*F)+F+F$
$\Rightarrow (T*F)+T+T$
$\Rightarrow (T)+T+T$
$\Rightarrow (E)+T+T$
$\Rightarrow F+T+T$
$\Rightarrow T+T+T$
$\Rightarrow E+T+T$
$\Rightarrow E+T$
E

Syntaxbaum



$\Rightarrow a*(a+a)$
$\Rightarrow F*(F+F)$
$\Rightarrow T*(T+T)$
$\Rightarrow T*(E+T)$
$\Rightarrow T*(E)$
$\Rightarrow T*F$
$\Rightarrow T$
E

$E \Rightarrow T \Rightarrow E+T \Rightarrow T+T \Rightarrow F+F \Rightarrow a+a$

Wollen statt a+a zB. abba + baba.

Wie? Variable anstelle des Terminalsymbols a.

Also ändern wir die Grammatik.

$F \Rightarrow a$ wird zu $F \Rightarrow A$ und $A \Rightarrow AA$, $A \Rightarrow a$, $A \Rightarrow b$ kommen hinzu.