Aufgabe 5:

monoton: $\forall \alpha \to \beta \in P \quad |\alpha| \le |\beta|$

kontextsensitiv: $\forall \tilde{A} \to \tilde{B} \in P \quad \tilde{A} \in \{\alpha A \gamma \mid \alpha, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*, A \in V\}$

$\tilde{B} \in \{\alpha \beta \gamma \mid \alpha, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*, \beta \in (V \cup \Sigma)^+\}$

mind. 1

Auf den ersten Blick (vor allem, weil es so ungefähr im Schöning steht, sind die Definitionen gleich. Die zweite ist nur etwas komplizierter.

Der entscheidende Unterschied ist jedoch der Folgende:
Bei kontextfrei wird nur eine Variable pro Regel abgeleitet:
$\alpha A \gamma \to \alpha \beta \gamma$ mit $\beta \in (V \cup \Sigma)^+$
Der Kontext bleibt gleich!

Bei einer monotonen Grammatik ist es aber erlaubt, mehrere Variablen auf einmal abzuleiten:
z.B. ABC ⇒ DEFGHI

Es soll die Äquivalenz der Aussagen gezeigt werden (⟺):
monoton ⟺ kontextfrei

„⟸" ist klar, da die kontextfreien Sprachen die Monotonieeigenschaft erfüllen. ⇒ Schöning S. 17 oder direkt $|\alpha A \gamma| = |\alpha| + \underset{=1}{|A|} + |\gamma| \le |\alpha| + \underset{|(V\cup\Sigma)^+| \ge 1}{|\beta|} + |\gamma| = |\alpha\beta\gamma|$

„⟹" Für diese Richtung gilt es zu zeigen, dass die monotone Regel aber sich durch mehrere kontextsensitive nachbilden lässt und somit zu ihnen äquivalent ist.
Nehmen wir an, ABC ⇒ DEFGHIJ wäre gleichzeitig A ⇒ DEF, B ⇒ GH, C ⇒ IJ

Dann können wir das kontextfrei auch so schreiben:

ABC ⇒ LBC
LBC ⇒ LBR
LBR ⇒ L GH R
L GHR ⇒ DEF GH R
DEFGHR ⇒ DEF GH IJ

oder allgemein:

$A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n \to B_1 B_2 \dots B_{n-1} B_n$ mit $|B_n| \geq |A_n| \ \forall n$

wird zu

$A_1 \dots \quad A_n \to L A_2 \dots A_n$

$L A_2 \dots \quad A_n \to L A_2 \dots A_{n-1} R$

$L A_2 \dots A_{n-1} R \to L B_2 A_3 \dots A_{n-1} R$

$L B_2 A_3 \dots A_{n-1} R \to L B_2 B_3 A_4 \dots A_{n-1} R$

$\vdots$

$L B_2 \dots B_{n-2} A_n R \to L B_2 \dots B_{n-2} B_{n-1} R$

$L B_2 \dots \quad B_{n-1} R \to B_1 B_2 \dots B_{n-2} B_{n-1} R$

$B_1 \dots \quad B_{n-1} R \to B_1 B_2 \dots \quad B_{n-1} B_n$

Wobei $L, R \notin V$.

Warum so kompliziert? Wieso sage ich nicht einfach bei $ABC \to DEFGHIJ$

$A \to DEF$
$B \to GH$
$C \to IJ$?

Weil dann ja plötzlich A auch ohne den Kontext BC abgeleitet werden kann!
Damit ist die Sprache aber u.U. nicht mehr äquivalent!
Genau aus diesem Grund werden L und R ($\notin V$) gebraucht.
Sie verhindern, dass irgendeine der neuen Regeln außerhalb unseres gewünschten Kontexts verwendet werden können.
Somit kann eine monotone Grammatik durch eine kontext-freie simuliert werden und damit sind beide äquivalent. $\square$